المادة : الرياضيات	السنة الدراسية : 2015/2014

الموضوع : ملخص بسيط لدروس الجبر لطلاب البكالوريا

المتتاليات

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times r$
عبارة الحد العام	$u_n = u_\alpha + (n-\alpha) \times r$ $\forall \alpha \in \Re$	$u_n = u_\alpha \times r^{n-\alpha}$ $\forall \alpha \in \Re$
المجموع	$S = \frac{n-\alpha+1}{2}(u_\alpha + u_n)$	$S = u_\alpha \times \frac{r^{n-\alpha+1} - 1}{r-1}$
الوسيط	$2B = A + C$ حيث A ، B ، C ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية	$B^2 = A \times C$ حيث A ، B ، C ثلاثة حدود متتابعة
النهايات	$r \rangle 0 ; \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ $r \langle 0 ; \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ $r = 0 ; \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_\alpha$	$r \rangle 0, u_\alpha \rangle 0 ; \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ $r \langle 0, u_\alpha \langle 0 ; \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ $-1 \langle r \langle 1 ; \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

البرهان بالتراجع

المرحلة الأولى : حساب S(0) ، S(1) ، ...

المرحلة الثانية : إثبات صحة الإستلزام : $S(n) \Rightarrow S(n+1)$

نفرض صحة S(n) و نبرهن على صحة S(n + 1).

الأعداد المركبة

1 - الشكل الجبري العدد المركب z : هو $z = x + y\,i$

x يسمى الجزء الحقيقي لـ z، أما y يسمى الجزء التخيلي لـ z.

2 - المرافق :

يسمى $\bar{z}$ مرافق z حيث : $\bar{z} = x - y\,i$

خواص :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2} ; \overline{z_1 \times z_2} = \bar{z_1} \times \bar{z_2} ; \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}} ; \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\bar{z_2}} ; \overline{z_1^n} = (\bar{z_1})^n$$

3 - الطويلة : $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

خواص :

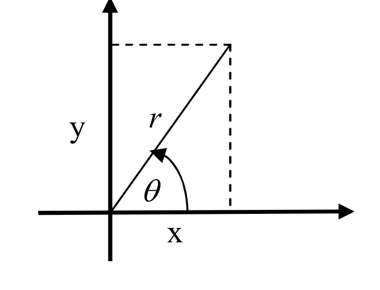
$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| ; |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| ; \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} ; |z_1^n| = |z_1|^n ; z \times \bar{z} = |z|^2$$

4 - الشكل المثلثي : لدينا $z = x + y\,i$

$$\begin{cases} \sin\theta = \frac{y}{r} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \end{cases}$$

و منه الشكل المثلثي للعدد المركب z هو :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r, \theta]$$



خواص : لدينا $z_1 = [r_1, \theta_1]$ و $z_2 = [r_2, \theta_2]$

$$z^n = [r^n, n\theta] ; z_1 \times z_2 = [r_1 \times r_2, \theta_1 + \theta_2] ; \frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$$

5 - الجذور (الحلول) التربيعية للعدد z :

الطريقة الجبرية : نضع $l = \alpha + \beta\,i$

نفرض $\delta^2 = l \,/\, \delta = x + y\,i$ نجد :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \ (1) \\ x^2 - y^2 = \alpha \ (2) \\ 2\,x\,y = \beta \ (3) \end{cases}$$

نجمع (1) و (2) لكي نحصل على x ، ثم نعوض x في (3) لكي نحصل على y .

الطريقة المثلثية : نضع $l = [r, \theta]$ نفرض $\delta^2 = l \,/\, \delta = [\alpha, \rho]$ نجد :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{2} + \pi\,k \,/\, k \in \{0,1\} \end{cases}$$

6 - الجذور النونية : نستعمل الطريقة المثلثية لأنها الأسهل.

نضع $l = [r, \theta]$ نفرض $\delta = [\alpha, \rho]$

$$\delta^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + 2\pi\,k \end{cases}$$

$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

7 - المعادلات من الدرجة II :

$a\,z^2 + b\,z + c = 0$ نحسب المميز Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$ نحسب جذري Δ $\{\delta_0, \delta_1\}$ ، باستعمال طريقة الجذور التربيعية. ثم نحسب الجذرين z_1 و z_2.

$$z_1 = \frac{-b - \delta_0}{2a} ; z_2 = \frac{-b - \delta_1}{2a}$$

8 - المعادلات من الدرجة III :

$a\,z^3 + b\,z^2 + c\,z + d = 0$ نتبع ما يلي :

- تحديد الحل الخاص z_0 .
- نكتب المعادلة على الشكل :

$$(z - z_0)(\alpha\,z^2 + \beta\,z + \delta) = 0$$

- بعد نشر المعادلة، نطابق المعادلتين و نحسب α و β و δ.
- و منه تصبح المعادلة :

$$\begin{cases} z - z_0 = 0 \\ \alpha\,z^2 + \beta\,z + \delta = 0 \end{cases}$$

و الحلول المحصل عليها تكتب كالتالي :

$$S = \{z_0, z_1, z_2\}$$

المادة : الرياضيات	السنة الدراسية : 2015/2014

الموضوع : ملخص دروس الجبر لطلاب البكالوريا

التحليل التوفيقي

1 - القائمة : هو عدد التشكيلات المتكونة من p عنصر مأخوذة من n عنصر بترتيب و إعادة (n^p).

➢ تطبق في الحالات التالية :
- الأعداد التي أرقامها غير مختلفة.
- الهيئات المرتبة.
- عمليات السحب واحدة بواحدة مع الإرجاع.
- الكلمات التي حروفها غير مختلفة.

2 - الترتيبة : هو عدد التشكيلات المتكونة من p عنصر مأخوذة من n عنصر بترتيب و بدون إعادة :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad n \geq p$$

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (n عاملي)

➢ تطبق في الحالات التالية :
- الأعداد التي أرقامها مختلفة.
- عمليات السحب واحدة بواحدة مع عدم الإرجاع.
- اللجان المنصبة (الرئيس، النائب، ...).
- الهيئات المرتبة ذات العناصر المختلفة
- الكلمات التي حروفها مختلفة.

3 - التوفيقة : هو عدد التشكيلات المتكونة من p عنصر مأخوذة من n عنصر بدون ترتيب و بدون إعادة :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \times p!} \qquad n \geq p$$

➢ تطبق في الحالات التالية :
- المجموعات الجزئية.
- اللجان متساوية الأعضاء.
- السحب دفعة واحدة.
- الحرف (أو) ترافقه $(+)$ الحرف (و) ترافقه $(\times)$.

الإحتمالات

$$P(F) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

المتغير العشوائي : رمزه x تحدد حسب المسألة المطروحة.

الأمل الرياضي : $A(x) = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \cdots + x_n P_n$

قانون الإحتمال : هو جدول يتم فيه وضع القيم.

k	0	1	2	...	n
x_k	x_0	x_1	x_2	...	x_n
P_k	P_0	P_1	P_3	...	P_n

لا بد من تحقق شرط $\sum_{i=1}^{n} P k = 1$

القواسم و المضاعفات

- نرمز للقاسم المشترك الأكبر بـ p. $(a \wedge b)$
- نرمز للمضاعف المشترك الأصغر بـ m.

بعض الخواص : $a = p\,a' \,; m\,p = a\,b$

القسمة الإقليدية : هو جدول نعين به القاسم المشترك الأكبر بين عددين طبيعيين.

	q_1	q_2				
a	B	x_1	x_2	...	-	
x_1	x_2				x_n	0

القاسم المشترك الأكبر $P = x_n$

نظرية بيزو :
$$\begin{cases} a / b \times c \\ \wedge \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a / c$$

نظرية غوس : x, y, α, β أعداد صحيحة حيث : $\alpha x + \beta y = 1$ فإن x و y أوليان فيما بينهما.

العدد الأولي : هو كل عدد له قاسمان فقط هما الواحد (1) و العدد نفسه.

حل المعادلات في Z^2 : $a x + b y = c$ و $a \wedge b$ لا يقسم c.

- نحدد حلا خاص (x_0, y_0) أي : $a x_0 + b y_0 = c$
- نطرح المعادلتين : $a(x - x_0) + y(y - y_0) = 0$

$$a(x - x_0) = y(y_0 - y)$$

- نقسم على p : $a'(x - x_0) = y'(y_0 - y)$
- نطبق نظرية بيزو :

$$\begin{cases} a' / b'(y_0 - y) \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases} \Rightarrow a' / y_0 - y$$

و منه : $y = -a'k + y_0$ و بالتعويض نجد : $x = b'k + x_0$

الموافقات

نقول عن x أنه يوافق y بترديد إذا كان الفرق $(x - y)$ يقبل القسمة على n أي : $x - y = k\,n$ و رمزه $x \equiv y[n]$.

خواص:

$x + x' \equiv y + y'[n]; x\,x' \equiv y\,y'[n]; \lambda\,x \equiv \lambda\,y[n]$

$x \div \alpha \equiv y \div \alpha[n \div \alpha]; x^i \equiv y^i[n]$

بواقي القسمة بالترديد :

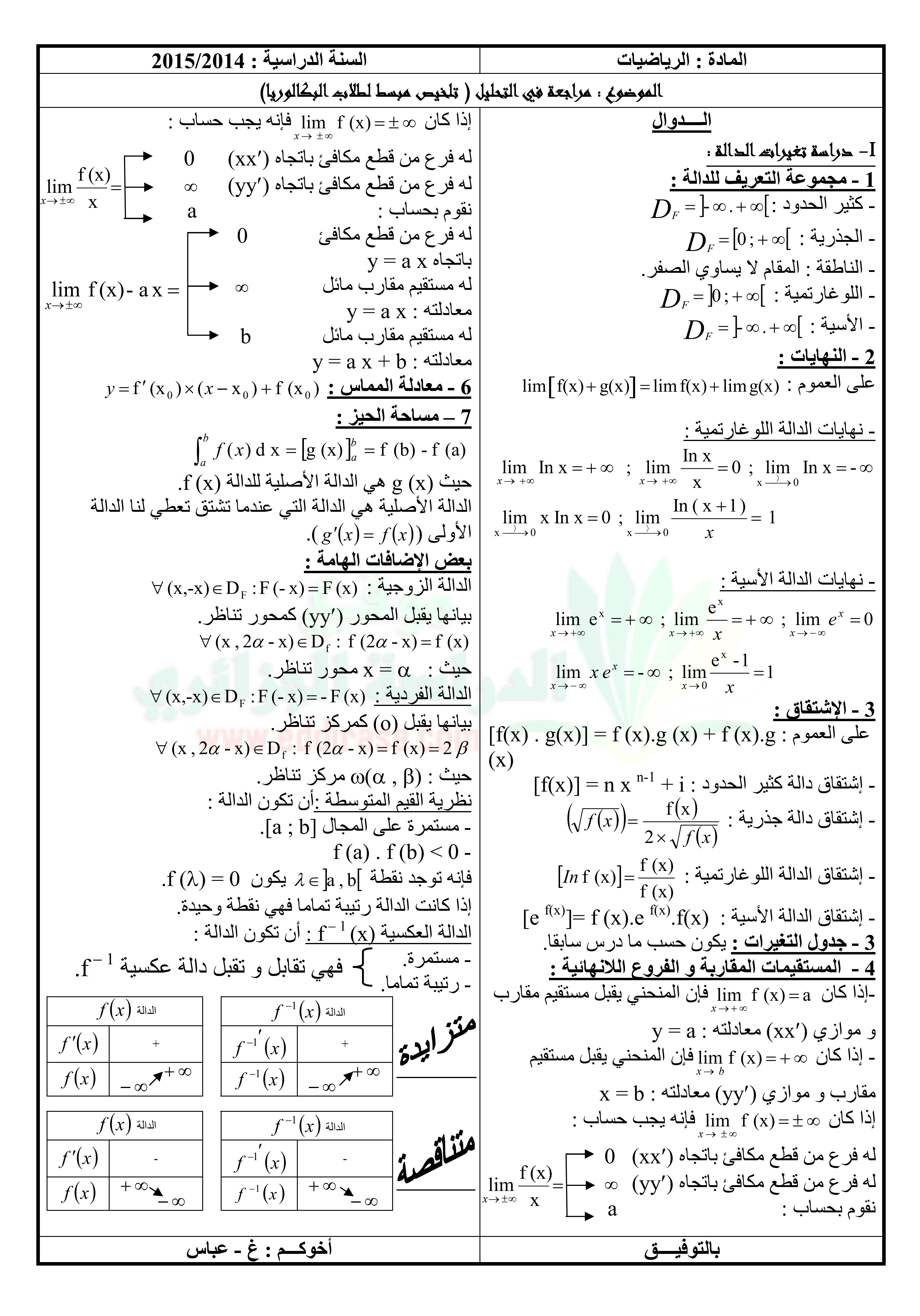
$a^0 \equiv 1[b]$; $n = i\,k \Rightarrow a^n \equiv 1[b]$

$a^1 \equiv a[b]$; $n = i\,k + 1 \Rightarrow a^n \equiv a[b]$

⋮

$a^i \equiv 1[b]$

يسمى i دور بواقي القسمة a^n على b .



السنة الدراسية : 2015/2014	المادة : الرياضيات

الموضوع : مراجعة في التحليل (تلخيص مبسط لطلاب البكالوريا)

الـــدوال

I- دراسة تغيرات الدالة :

1 - مجموعة التعريف للدالة :

- كثير الحدود : $D_F =]-\infty . +\infty[$
- الجذرية : $D_F = [0 ; +\infty[$
- الناطقة : المقام لا يساوي الصفر.
- اللوغارتمية : $D_F =]0 ; +\infty[$
- الأسية : $D_F =]-\infty . +\infty[$

2 - النهايات :

على العموم : $\lim[f(x)+g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x)$

- نهايات الدالة اللوغارتمية :

$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} x \ln x = 0$; $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

- نهايات الدالة الأسية :

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} x e^x = -0$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

3 - الإشتقاق :

على العموم : [f(x) . g(x)] = f (x).g (x) + f (x).g (x)

- إشتقاق دالة كثير الحدود : $[f(x)] = n\, x^{n-1} + i$
- إشتقاق دالة جذرية : $\left(\sqrt{f(x)}\right) = \frac{f(x)}{2\times\sqrt{f(x)}}$
- إشتقاق الدالة اللوغارتمية : $[\ln f(x)] = \frac{f(x)}{f(x)}$
- إشتقاق الدالة الأسية : $[e^{f(x)}] = f(x).e^{f(x)}.f(x)$

3 - جدول التغيرات : يكون حسب ما درس سابقا.

4 - المستقيمات المقاربة و الفروع اللانهائية :

-إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ فإن المنحني يقبل مستقيم مقارب و موازي (xx') معادلته : $y = a$

- إذا كان $\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$ فإن المنحني يقبل مستقيم مقارب و موازي (yy') معادلته : $x = b$

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فإنه يجب حساب :

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} =$
- 0 ← له فرع من قطع مكافئ باتجاه (xx')
- ∞ ← له فرع من قطع مكافئ باتجاه (yy')
- a ← نقوم بحساب :

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فإنه يجب حساب :

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} =$
- 0 ← له فرع من قطع مكافئ باتجاه (xx')
- ∞ ← له فرع من قطع مكافئ باتجاه (yy')
- a ← نقوم بحساب :

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - a x =$
- 0 ← له فرع من قطع مكافئ باتجاه $y = a x$
- ∞ ← له مستقيم مقارب مائل معادلته : $y = a x$
- b ← له مستقيم مقارب مائل معادلته : $y = a x + b$

6 - معادلة المماس : $y = f'(x_0)\times(x - x_0) + f(x_0)$

7 – مساحة الحيز :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

حيث $g(x)$ هي الدالة الأصلية للدالة $f(x)$.

الدالة الأصلية هي الدالة التي عندما تشتق تعطي لنا الدالة الأولى ($g'(x) = f(x)$).

بعض الإضافات الهامة :

الدالة الزوجية : $\forall (x,-x) \in D_F : F(-x) = F(x)$

بيانها يقبل المحور (yy') كمحور تناظر.

$\forall (x, 2\alpha - x) \in D_f : f(2\alpha - x) = f(x)$

حيث : $x = \alpha$ محور تناظر.

الدالة الفردية : $\forall (x,-x) \in D_F : F(-x) = -F(x)$

بيانها يقبل (o) كمركز تناظر.

$\forall (x, 2\alpha - x) \in D_f : f(2\alpha - x) = f(x) = 2\beta$

حيث : $\omega(\alpha , \beta)$ مركز تناظر.

نظرية القيم المتوسطة :أن تكون الدالة :

- مستمرة على المجال $[a ; b]$.
- $f(a) . f(b) < 0$

فإنه توجد نقطة $\lambda \in]a , b[$ يكون $f(\lambda) = 0$.

إذا كانت الدالة رتيبة تماما فهي نقطة وحيدة.

الدالة العكسية $f^{-1}(x)$: أن تكون الدالة :

- مستمرة.
- رتيبة تماما.

} فهي تقابل و تقبل دالة عكسية f^{-1}.

متزايدة

الدالة $f^{-1}(x)$	
${f^{-1}}'(x)$	+
$f^{-1}(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

الدالة $f(x)$	
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

متناقصة

الدالة $f^{-1}(x)$	
${f^{-1}}'(x)$	-
$f^{-1}(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

الدالة $f(x)$	
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

أخوكـــم : غ - عباس	بالتوفيـــق

المادة : الرياضيات	السنة الدراسية : 2015/2014

الموضوع : ملخص بسيط لدروس الجبر و الهندسة و التحليل لطلاب البكالوريا

المعادلات التفاضلية

$y'=f(x)$ حلها هو : $y=g(x)$ / g دالة أصلية f .

$y''=f(x)$ حلها $y=k(x)+\alpha x+\beta$ / $k''(x)=f(x)$.

$a\in\Re^*/y'-ay=0$ حلها $\alpha\in\Re/y=\alpha\,e^{ax}$

$a\in\Re/y''+ay=0$

- إذا كان $a\rangle 0$ نحولها للشكل $y''+\omega^2y=0$ / $\omega^2=a$ حلها $(\alpha,\beta)\in\Re^2$ / $y=\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$
- إذا كان $a\langle 0$ نحولها للشكل $y''-\omega^2y=0$ / $\omega^2=a$ حلها $(\lambda,\delta)\in\Re^2$ / $y=\lambda\cos\omega x+\delta\sin\omega x$

$(a,b)\in\Re^2/y''+ay'+by=0$ نرفقها بالمعادلة : $g^2+ag+b=0$ / $\Delta=a^2-4b$ نميز الحالات :

- $\Delta=0$ لها حل مضاعف و حل المعادلة التفاضلية : $(\lambda,\delta)\in\Re^2$ / $y=(\lambda x+\delta)e^{gx}$
- $\Delta\rangle 0$ لها حلان متمايزان g_1 و g_2. و حل المعادلة التفاضلية : $(\lambda,\delta)\in\Re^2$ / $y=\lambda\,e^{g_1x}+\delta\,e^{g_2x}$
- $\Delta\langle 0$ لها حلان مركبان $g_1=\alpha+\beta i$ و $g_2=\alpha-\beta i$. و حل المعادلة التفاضلية : $(\lambda,\delta)\in\Re^2$ / $y=(\lambda\cos\beta x+\delta\sin\beta x)e^{\alpha x}$

التحويلات النقطية

إسم التحويل	الصيغة المركبة: عبارة الصيغة	الصيغة المركبة: عناصر التحويل
الإنسحاب	$z'=az+b$ $a=1$	- شعاع توجيه $\vec{u}$: $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ حيث : $b=\alpha+\beta i$
التحاكي	$z'=az+b$ $a\in\Re^*-\{1\}$	- نقطة صامدة z_0 : $z_0=\dfrac{b}{1-a}$ - نسبته a
الدوران	$z'=az+b$ $a\in C^*-\{1\}$ $\lvert a\rvert=1$	- نقطة صامدة z_0. - زاويته θ عمدة (a). [arg (z)]
التشابه المباشر	$z'=az+b$ $a\in C^*-\{1\}$ $\lvert a\rvert\neq 1$	- نقطة صامدة z_0. - نسبته a - زاويته θ عمدة (a)

التكاملات

لدينا f مستمرة على المجال D_f ، g الدالة الأصلية للدالة f :

$$\int_a^b f(x)\,dx=[g(x)]_a^b=g(b)-g(a)$$

خواص التكامل :

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

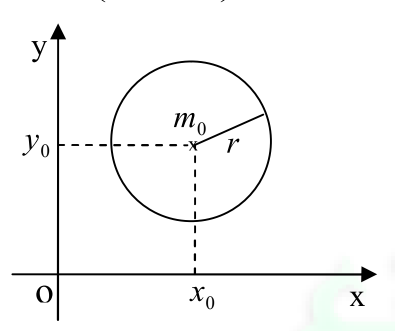
$$\int_a^b \alpha\, f(x)\,dx=\alpha\int_a^b \alpha\, f(x)\,dx$$

التكامل بالتجزئة :

$$\int_a^b f'(x)\times g(x)\,dx=[f(x)\times g(x)]_a^b-\int_a^b g'(x)\times f(x)\,dx$$

معادلة الدائرة : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r$

$$m_0(x_0,y_0)=m_0\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right);\ r=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2-4\delta}}{2}$$



المرجح: $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=0$

- تسمى G مرجح الجملة و مركز المسافات المتناسبة.
- إذا كان $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$ يسمى G مركز المسافات المتساوية.
- مركز المسافات المتساوية لثلاثة نقاط A، B، C هو مركز ثقل المثلث ABC.

إحداثيات النقطة G : $G(x_G,y_G)$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\\[2mm] y_G=\dfrac{\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\end{cases}$$

مجموعة النقاط S:

$$\alpha_1\overrightarrow{MA}_n^2+\alpha_2\overrightarrow{MA}_n^2+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA}_n^2=k$$

$$\alpha_1\left\|\overrightarrow{MA_1}\right\|^2+\alpha_2\left\|\overrightarrow{MA_2}\right\|^2+\cdots+\alpha_n\left\|\overrightarrow{MA_n}\right\|^2=k$$

لتحديد مجموعة النقاط نميز حالتين :

- إذا كان $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$ إما أن يكون (S مستقيما) أو ($S=\phi$) أو ($S=\pi$).
- إذا كان $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$ إما أن يكون (S دائرة) أو ($S=\phi$).

بالتوفيـــق	أخوكـــــــــم : غ - عباس